第3章 多元正态总体参数的假设检验

§3.1 二次型分布

Def1: $X_i \sim N(\mu_i, 1)$ 相互独立

称 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n,\delta)$ 为自由度为n，非中心参数 $\delta=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2$ 的 χ^2分布

当 $\delta=0$ 时，$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$，中心$\chi^2$分布

当 $\delta>0$ 时，$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n,\delta)$，非中心$\chi^2$分布

$E(\chi^2(n,\delta)) = n+\delta$，$Var(\chi^2(n,\delta)) = 2n+4\delta$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i+\mu_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\mu_i(X_i-\mu)$

Def2: 设$X\sim N(\delta,1)$，$Y=\chi^2(n)$ 相互独立

称 $T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n,\delta)$ 为自由度n，非中心参数为δ的t分布

$X\sim N(0,2)$　$\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim \sqrt{2}\,t(n)$

Def3: 设$X\sim\chi^2(n,\delta)$，$Y\sim\chi^2(m)$ 相互独立

称 $F=\frac{X/n}{Y/m}\sim F(n,m,\delta)$ 为自由度(n,m)，非中心参数为δ的分布

Prop1: χ^2分布有可加性　设$Y_1\cdots Y_k$相互独立，$Y_i\sim\chi^2(n_i,\delta_i)$，则 $\sum_{i=1}^{k}Y_i\sim\chi^2(\sum_{i=1}^{k}n_i,\sum_{i=1}^{k}\delta_i)$

Prop2: 可分块　设$X\sim N_p(\mu,I_p)$，$X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\begin{matrix}r\\p-r\end{matrix}$，$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$，

则 $X_1'X_1\sim\chi^2(r,\mu_1'\mu_1)$，$X_2'X_2\sim\chi^2(p-r,\mu_2'\mu_2)$，$X'X\sim\chi^2(p,\mu'\mu)$

Part 1　当$X\sim N(\mu,I)$时，二次型$X'AX$　$(A=A')$

Thm1: 设$A=A'$，$X\sim N_p(\mu,I)$ 且 $R(A)=r$

则 $X'AX\sim\chi^2(r,\mu'A\mu) \Leftrightarrow A^2=A$

已知：$\begin{cases} X_i\sim N(\mu_i,1) & i=1\cdots n,\ ind \\ \sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n,\delta), & \delta=\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $R(A)=r$，$\exists$正交阵Γ，s.t. $\Gamma'A\Gamma=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}=\Lambda$　$A=\Gamma\Lambda\Gamma'$

$X'AX=(X'\Gamma)\Lambda(\Gamma'X)$，令$Y=\Gamma'X=(y_1\cdots y_p)'\sim N_p(\Gamma'\mu,\underbrace{\Gamma'I\Gamma}_{I})$

$y_1\cdots y_p$ ind　$X'AX=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ry_r^2$　$y_i^2\sim\chi^2(1,\delta_i)$，$X'AX\sim\chi^2(r)$

$\phi_{\lambda_iy_i^2}=e^{it\lambda_iy_i^2}=(1-2i\lambda_it)^{-\frac{1}{2}}$，$(1-2it)^{\frac{r}{2}}=\prod_{i=1}^{r}(1-2i\lambda_it)^{-\frac{1}{2}}$　$\therefore\lambda_i=1$　$\therefore A=A^2$

引：$X\sim N_p(\mu,\Sigma)$，$R(A)=r$

$X'AX\sim\chi^2(r,\mu'A\mu)\Leftrightarrow A\Sigma A=A$

证：$Y=\Sigma^{-\frac{1}{2}}X\sim N_p(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu,I_p)$

$\underbrace{(X'\Sigma^{-\frac{1}{2}})}_{Y'}\underbrace{(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}})}_{B}\underbrace{(\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)}_{Y}$

Thm2: 设$X\sim N_p(\mu,I)$，$A_i=A_i'$　$(i=1,2\cdots k)$

则 $X'A_iX$　$(i=1,\cdots k)$ 相互独立 $\Leftrightarrow A_iA_j=0$

$X'A_iX$ 与 A_jX 相互独立 $\Leftrightarrow A_iA_j=0$

Part 2　$X\sim N(\mu,\Sigma)$

Thm5: 设$Y\sim N_p(\mu,\Sigma)$，$\Sigma>0$，$A_1\cdots A_k$是对称阵

则 $Y'A_iY$　$(i=1\cdots k)$ 相互独立 $\Leftrightarrow A_i\Sigma A_j=0$

$Y=\Sigma^{-\frac{1}{2}}X\sim N_p(\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu,I_p)$

$\underbrace{(X'\Sigma^{-\frac{1}{2}})}_{Y'}\underbrace{(\Sigma^{\frac{1}{2}}A\Sigma^{\frac{1}{2}})}_{B}\underbrace{(\Sigma^{-\frac{1}{2}}X)}_{Y}$

相互独立：$\Sigma^{\frac{1}{2}}A_i\Sigma^{\frac{1}{2}}\Sigma^{\frac{1}{2}}A_j\Sigma^{\frac{1}{2}}=0$

$A_i\Sigma A_j=0$

Wishart 分布

(中心) Def: $X_{(\alpha)}\ (\alpha=1,\cdots,n) \sim N_p(\underline{0},\Sigma)$, iid

$\underset{n\times p}{X} = (X_{(1)} \cdots X_{(n)})'$

$\underset{p\times p}{W} = \sum_{i=1}^{n} X_{(i)}X_{(i)}' = (X_{(1)}\cdots X_{(n)})\begin{pmatrix} X_{(1)}' \\ \vdots \\ X_{(n)}' \end{pmatrix} = X'X \sim W_p(n,\Sigma)$

(非中心) Def: $X_{(\alpha)}\ (\alpha=1,\cdots,n) \sim N_p(\underline{\mu_\alpha},\Sigma)$, ind

$W \sim W_p(n,\Sigma,\Delta)$, 其中 $\Delta = \sum_{\alpha=1}^{n}\mu_\alpha\mu_\alpha'$ 或 $\Delta = M'M$

Prop:

1、$X_{(\alpha)} \sim N_p(\mu,\Sigma)$, iid

$A = \sum_{\alpha=1}^{n}(X_{(\alpha)}-\bar{X})(X_{(\alpha)}-\bar{X})' \sim W_p(\underline{n-1},\Sigma)$ 样本离差阵　　$A \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n-1} Z_i Z_i'$ ($Z_i \overset{iid}{\sim} N(0,\Sigma)$)

2、$W_i \sim W_p(n_i,\Sigma)$, ind

$\sum_{i=1}^{k} W_i \sim W_p(n,\Sigma)$, $n=n_1+\cdots+n_k$　自由度可加

3、$W \sim W_p(n,\Sigma)$, $C_{m\times p}$ 为常数矩阵

$CWC' \sim W_m(n, C\Sigma C')$

$W\sim W_p(n,\Sigma)$

$X_i \overset{iid}{\sim} N_p(0,\Sigma)$　$W \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} X_iX_i'$

$CWC' \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} CX_iX_i'C' = \sum_{i=1}^{n}(CX_i)(CX_i)'$

$Y_i = CX_i \overset{iid}{\sim} N_p(0, C\Sigma C')$　$CWC = \sum_{i=1}^{n} Y_iY_i' \sim W_m(0, C\Sigma C')$

specially　$aW \sim W_p(n, a\Sigma)$ ($a>0$, 为常数)

$l' = (l_1 \cdots l_p)$, $l'Wl \sim W_1(n, l'\Sigma l)$ 即 $\sigma^2\chi^2(n)$

作业2　4、分块 Wishart 矩阵的分布

$X_{(\alpha)} \overset{iid}{\sim} N_p(0,\Sigma)$, $\Sigma = \begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$

$W = \sum_{\alpha=1}^{n} X_{(\alpha)}X_{(\alpha)}' = \begin{pmatrix}W_{11} & W_{12}\\ W_{21} & W_{22}\end{pmatrix} \sim W_p(n,\Sigma)$　　$W_{11} = \sum_{\alpha=1}^{n} X_{(\alpha 1)}X_{(\alpha 1)}' \sim W_r(n,\Sigma_{11})$

则 $W_{11} \sim W_r(n,\Sigma_{11})$, $W_{22} \sim W_{p-r}(n,\Sigma_{22})$　　$W_{22} = \sum_{\alpha=2}^{n} X_{(\alpha 2)}X_{(\alpha 2)}' \sim W_{p-r}(n,\Sigma_{22})$

$\Sigma_{12}=0$ 时, W_{11} W_{22} 相互独立

5、$W \sim W_p(n,\Sigma)$, $W_{22\cdot 1} = W_{22} - W_{21}W_{11}^{-1}W_{12}$

$W_{11\cdot 2} = W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{21}$

则 $W_{22\cdot 1} \sim W_{p-r}(n-r, \Sigma_{22\cdot 1})$, 其中 $\Sigma_{22\cdot 1} = \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$ 且 $W_{22\cdot 1}$ 与 W_{11} 相互独立

$W_{11\cdot 2} \sim W_r(n-(p-r), \Sigma_{11\cdot 2})$, 其中 $\Sigma_{11\cdot 2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$ 且 $W_{11\cdot 2}$ 与 W_{22} 独立

6、$W \sim W_p(n,\Sigma)$, 则 $E(W) = n\Sigma$

7、$X \sim N_{n\times p}(M, I_n\otimes\Sigma)$, A 为 n 阶对称阵　　矩阵正态分布　if $Vec(X') \sim N_{np}(E, I_n\otimes\Sigma)$

$\Rightarrow X \sim N_{n\times p}(EX, I_n\otimes\Sigma)$

则 $X'AX \sim W_p(r,\Sigma,\Delta)$, $\Delta = M'AM$　　△ $X'AX \sim W$

$\Leftrightarrow A^2 = A$, $rank(A) = r$　　$\Leftrightarrow \forall l\in R^p, (l\neq 0)\ \underbrace{l'X'AXl}_{(Xl)'A(Xl)} \sim \chi^2$

作业1　8、$X \sim N_{n\times p}(M, I_n\otimes\Sigma)$, A,B 投影阵

则 $X'AX$ 与 $X'BX$ 相互独立 $\Leftrightarrow AB=0$

$\rightarrow$ $X'AX \sim W_p(r(A),\Sigma,M'AM)$　　$l_1'X'AXl_1 \sim \chi_p^2(r(A), M'AM)$ ($\forall l_1$)

$X'BX \sim W_p(r(B),\Sigma,M'BM)$　　$l_2'X'BXl_2 \sim \chi_p^2(r(A), M'BM)$ ($\forall l_2$)

$\leftarrow$ $\underline{X'A'}\underline{AX}$　考察 $Cov(Vec(AX), Vec(BX)) = 0$

T^2分布

$$\left(\frac{\xi}{\sqrt{\eta}}\right)^2=\frac{\xi^2}{\eta}\cdot n=n\eta^{-1}\xi^2\to n\xi'\eta^{-1}\xi$$

(中心) Def: $X\sim N_p(0,\Sigma)$，随机阵 $W\sim W_p(n,\Sigma)$，$(\Sigma>0,\ n\geq p)$，且 X 与 W 独立

称统计量 $T^2=nX'W^{-1}X$ 为霍特林 T^2 统计量，记为 $T^2\sim T^2(p,n)$

未出现 Σ → $\tilde X\sim N(0,I_p)$　$\tilde W\sim W_p(n,I_p)$　$n\tilde X'\tilde W^{-1}\tilde X\overset{d}{=}nX'W^{-1}X$ $\xrightarrow[明]{证}$ $\tilde X\overset{d}{=}\Sigma^{-\frac12}X$　$\tilde W\overset{d}{=}\Sigma^{-\frac12}W\Sigma^{-\frac12}$

$n\tilde X'\tilde W^{-1}\tilde X\overset{d}{=}n(\Sigma^{-\frac12}X)'(\Sigma^{-\frac12}W\Sigma^{-\frac12})^{-1}\Sigma^{-\frac12}X=\sim$

(非中心) Def: $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$，$T^2\sim T^2(p,n,\mu)$

Prop: 1、$X_{(a)}\ (a=1\cdots n)\sim N_p(\mu,\Sigma)$

统计量 $T^2=(n-1)[\sqrt n(\bar X-\mu)]'A^{-1}[\sqrt n(\bar X-\mu)]$

$=n(n-1)(\bar X-\mu)'A^{-1}(\bar X-\mu)\sim T^2(p,n-1)$　$F(p,n-p)$

$A\overset{d}{=}\sum_{i=1}^{n-1}Z_iZ_i'$，其中 $Z_i\sim N_p(0,\Sigma)$ $\Rightarrow$ $A\sim W_p(n-1,\Sigma)$

$\bar X\sim N_p(\mu,\frac{\Sigma}{n})$，$\sqrt n(\bar X-\mu)\sim N_p(0,\Sigma)$

2、设 $T^2\sim T^2(p,n)$

则 $\frac{n-p+1}{np}T^2\sim F(p,n-p+1)$

△利用F计算T^2
将T^2的统计量转化为F的统计量

$$\frac{n-p+1}{np}T_p^2(n)\overset{d}{=}\frac{n-p+1}{np}nX'W^{-1}X=\frac{n-p+1}{p}X'W^{-1}X=\frac{X'\Sigma^{-1}X/p}{X'\Sigma^{-1}X/(n-p+1)}\cdot X'W^{-1}X=\frac{X'\Sigma^{-1}X/p}{\left(\frac{X'\Sigma^{-1}X}{X'W^{-1}X}\right)/n-p+1}$$

$X\sim N_p(0,\Sigma)$　$\Sigma^{-\frac12}X\sim N_p(0,I_p)$　$(\Sigma^{-\frac12}X)'(\Sigma^{-\frac12}X)\sim\chi^2(p)$

3、$X_{(a)}\ (a=1,2\cdots n)\sim N_p(\mu,\Sigma)$

$T^2=n(n-1)\bar X'A^{-1}\bar X=(n-1)(\sqrt n\bar X')A^{-1}(\sqrt n\bar X)$

则 $\frac{n-p}{p}\cdot\frac{T^2}{n-1}\sim F(p,n-p,\delta)$　其中 $\delta=n\mu'\Sigma^{-1}\mu$

4、T^2 统计量的分布只与 n,p 有关，而与 Σ 无关

5、T^2 统计量对非退化^{线性}变换保持不变

$X_{(a)}\ (a=1\cdots n)\sim N_p(\mu,\Sigma)$

$T_x^2=n(n-1)(\bar X_x-\mu)'A_x^{-1}(\bar X_x-\mu)\sim T^2(p,n-1)$

令 $Y_{(a)}=CX_{(a)}+d$，其中 C 为非退化常数阵，d 为常向量

则 $T_y^2=T_x^2$

$A_x=\sum_{n=1}^{n}(X_i-\bar X)(X_i-\bar X)'\sim W(n-1,\Sigma)$

$y_i=CX_i+d\sim N_p(C\mu+d,\ C\Sigma C')$

$A_y=\sum_{n=1}^{n}(y_i-\bar y)(y_i-\bar y)'=\sum_{n=1}^{n}(CX_i+d-C\bar X-d)(CX_i+d-C\bar X-d)'=CA_xC'\sim W_p(n-1,C\Sigma C')$

$\bar y=\frac1n\sum_{i=1}^{n}(CX_i+d)=C\bar X+d\sim N_p(C\mu+d,\frac{C\Sigma C'}{n})$

$T_y^2=n(n-1)(\bar y-C\mu-d)'A_y^{-1}(\bar y-C\mu-d)\sim T^2(p,n-1)$

Wilks Λ分布

(辅助) Def: $X\sim N_p(\mu,\Sigma)$，称 $|\Sigma|$ 为 X 的广义方差

$X_{(a)}$ 样本 $(a=1\cdots n)$，称 $|\frac1nA|$ 或 $|\frac{1}{n-1}A|$ 为样本广义方差

Def: 设 $A_1\sim W_p(n_1,\Sigma)$，$A_2\sim W_p(n_2,\Sigma)$，$(\Sigma>0,\ n_1\geq p)$ 且 A_1 与 A_2 独立

广义方差之比 $\Lambda=\frac{|A_1|}{|A_1+A_2|}$，为 Λ 统计量，服从Wilks分布，记为 $\Lambda\sim\Lambda(p,n_1,n_2)$

Prop: △1、$n_2=1$ 时，$n_1=n>p$，则 $\Lambda(p,n,1)\overset{d}{=}\frac{1}{1+\frac1nT^2(p,n)}$

$A_2\sim W(1,\Sigma)$　$A_2\overset{d}{=}\sum_{i=1}^{n-1}X_iX_i'$，$X\sim N_p(0,\Sigma)$ 且 X 与 A_1 独立

$$\frac{|A_1|}{|A_1+A_2|}\overset{d}{=}\frac{|A_1|}{|A_1+XX'|}\qquad\begin{vmatrix}A_1&-X\\X'&1\end{vmatrix}=\begin{cases}|A_1|\,|1+X'A_1^{-1}X|\\|A_1+XX'|\end{cases}$$

$$=\frac{1}{1+X'A_1^{-1}X}=\frac{1}{1+\frac1n\cdot nX'A_1^{-1}X}$$

$$\frac{n-p+1}{np}T^2=\frac{n-p+1}{p}\cdot\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\overset{d}{=}F(p,n-p+1)$$